

מודלים סטוכסטיים - מבחן מסכם

207.2320

מועד א' - תשפ"ו - סמסטר ב' - 15.7.2026

מרצה הקורס: פרופ' לירון רבנר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות (משני הצדדים) ומחשבון.

הנחיות: המבחן מורכב משלוש שאלות המחולקות לסעיפים. ליד כל סעיף רשומות מספר הנקודות עבור פתרון נכון. בסך הכל אפשר לצבור 110 נקודות במבחן. הציון הסופי הוא המינימום בין הנקודות שנצברו ל-100. נמקו את תשובותיכם. תשובה סופית ללא הסבר לא תקבל ניקוד. בהצלחה!

1. נתונה שרשרת מרקוב $(X_n)_{n \geq 0}$ על מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ עם מטריצת מעברים

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (א) (4 נק') ציירו את דיאגרמת המעברים של השרשרת. ✓
 (ב) (4 נק') מצאו את המחלקות המתקשרות של השרשרת. איזה מחלקות הן סגורות? ✓
 (ג) (4 נק') ציינו את זמן המחזור של כל אחד מהמצבים. ✓
 (ד) (4 נק') קבעו איזה מצבים הם נשנים ואיזה הם חולפים. ✓
 (ה) (6 נק') בהינתן מצב התחלתי $X_0 = 1$, מהי ההסתברות להגיע למצב 3? ✓
 (ו) (6 נק') בהינתן מצב התחלתי $X_0 = 1$, מהי תוחלת מספר הצעדים עד שהשרשרת תגיע לראשונה לקבוצת המצבים $A = \{3, 5, 6\}$? ✓
 (ז) (6 נק') חשבו את ההסתברות הגבולית $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{13}^n$. ✓
 (ח) (6 נק') חשבו את כל ההתפלגויות הסטציונריות של השרשרת. ✓

2. בשני כדים מפוזרים m כדורים, מתוכם r אדומים וה- $b = m - r$ הנותרים הם כחולים. בכל יחידת זמן בוחרים כד באקראי וכדור אקראי מתוכו ומעבירים אותו לכד השני. אם אחד הכדים ריק אז הכד המלא נבחר בוודאות. נסמן ב- R_n את מספר הכדורים האדומים בכד מספר 1 (הכדים מסומנים עם תוויות '1' ו-'2') לאחר $n \geq 0$ יחידות זמן. בצורה דומה נסמן ב- B_n את מספר הכדורים הכחולים בכד מספר 1 לאחר $n \geq 0$ יחידות זמן. בנוסף, נגדיר את הוקטור $X_n = (B_n, R_n)$.

- (א) (6 נק') הראו כי התהליך $(B_n)_{n \geq 0}$ הוא לא שרשרת מרקוב. הסבירו מדוע $(X_n)_{n \geq 0}$ היא כן שרשרת מרקוב בזמן בדיד. ציירו את דיאגרמת המעברים המתאימה למקרה של $m = 3$ ו- $b = 1$. ✓
 (ב) (6 נק') הניחו בסעיף זה כי $m = 2$ ו- $b = 1$. נתון שכד 1 ריק בזמן $n = 0$. מהי תוחלת הזמן עד שלראשונה כל הכדורים (אדומים וכחולים) יהיו בכד 1? ✓
 (ג) (6 נק') הניחו בסעיף זה כי $m = 2$ ו- $b = 1$. נתון שבזמן $n = 0$ ישנו כדור כחול אחד בכד 1. מהי התפלגות הזמן עד שלראשונה הכדור הכחול יהיה בכד 2? ✓
 (ד) (6 נק') הניחו בסעיף זה כי $m = 3$ ו- $b = 1$. חשבו את ההסתברות שכל הכדורים האדומים בכד 1 לפי ההתפלגות הסטציונרית. ✓
 (ה) (6 נק') הניחו בסעיף זה כי $m = 3$. בתחילת הניסוי מגרילים את מספר הכדורים האדומים לפי התפלגות אחידה על $\{0, 1, 2, 3\}$. אנחנו יכולים לצפות בכל יחידת זמן בכדורים הנמצאים בכד 1 כאשר בזמן 0 הכד ריק. בהינתן שצפינו ברצף $(B_1 = 1, B_2 = 2)$, מה הסיכוי שמספר הכדורים האדומים הוא 1? ✓

3. בחברה קטנה ישנם 4 שרתי מחשוב ו-2 מומחי אבטחה. תקיפות של האקרים על השרתים מגיעות לפי תהליך פואסון עם תוחלת של אחת ליום. השרת המותקף נבחר באופן מקרי אחיד מכל השרתים הפעילים (וב"ת בניסיונות הקודמים). התקיפה מצליחה בהסתברות 0.1 (גם כן באופן ב"ת בניסיונות הקודמים). כאשר תקיפה מצליחה אז השרת מושבת עד שמומחה מתקן אותו. זמן התיקון של שרת הוא מעריכי עם תוחלת של יומיים. אם שני המומחים עסוקים אז השרתים צריכים לחכות עד שאחד מהם מתפנה. שימו לב כי תקיפות מתבצעות רק על שרתים פעילים (למשל אם שניים פעילים אז כל אחד מהם נבחר בהסתברות חצי).

- (א) (5 נק') מה הסיכוי שהחברה תעבור יום שלם ללא תקיפה מוצלחת המשביתה שרת?
- (ב) (5 נק') בהינתן כי ביום מסוים הייתה תקיפה מוצלחת אחת, מהי תוחלת מספר התקיפות הכולל באותו יום?
- (ג) (5 נק') נניח כי השרתים ממוספרים 1 עד 4. האם המאורע "ביום מסוים שרת 1 הושבת" בלתי תלוי במאורע "שרת 2 הושבת באותו יום"?
- (ד) (5 נק') נתון כי במשך שבוע עבודה של 5 ימים (ראשון עד חמישי) היו 10 תקיפות. מה הסיכוי שכל התקיפות התרחשו ביום ראשון או שני?
- (ה) (5 נק') נתון כי בבוקר מסוים שני שרתים מושבתים ושניים עובדים. מה הסיכוי ששני השרתים המושבתים יהיו תקינים לפני שתהיה תקיפה מוצלחת נוספת?
- (ו) (5 נק') נסמן ב- X_t את מספר השרתים הפעילים בזמן $t \geq 0$. הסבירו מדוע $(X_t)_{t \geq 0}$ היא שרשרת מרקוב בזמן דציף וציירו את דיאגרמת המצבים שלה.
- (ז) (5 נק') האם השרשרת היא ארגודית? אם כן, חשבו את ההתפלגות הסטציונרית שלה.
- (ח) (5 נק') העלות של שרת מושבת היא 1,000 ש"ח לשעה. בטווח הארוך, מהי העלות הכוללת הממוצעת לשעה?