

מודלים סטוכסטיים - מבחן מסכם

207.2320

מועד א' - תשפ"ה - סמסטר ב' - 17.7.2025

מרצה הקורס: פרופ' לירון רבנר.

משך הבחינה: שתיים וחצי.

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות (משני הצדדים) ומחשבון.

הנחיות: ההמבחן מורכב משלוש שאלות המחולקות לסעיפים. ליד כל סעיף רשומות מספר הנקודות עבור פתרון נכון. בסך הכל אפשר לצבור 110 נקודות במבחן. הציון הסופי הוא המינימום בין הנקודות שנצברו ל-100. נמקו את תשובותיכם. תשובה סופית ללא הסבר לא תקבל ניקוד. בהצלחה!

1. נתונה שרשרת מרקוב $(X_n)_{n \geq 0}$ על מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ עם מטריצת מעברים

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

- (א) (4 נק') ציירו את דיאגרמת המעברים של השרשרת.
 - (ב) (4 נק') מצאו את המחלקות המתקשרות של השרשרת. איזה מחלקות הן סגורות?
 - (ג) (4 נק') ציינו את זמן המחזור של כל אחד מהמצבים.
 - (ד) (4 נק') קבעו איזה מצבים הם נשנים ואיזה הם חולפים.
 - (ה) (6 נק') בהינתן מצב התחלתי $X_0 = 2$, מהי ההסתברות להגיע למצב 6?
 - (ו) (6 נק') בהינתן מצב התחלתי $X_0 = 2$, מהי תוחלת מספר הצעדים עד שהשרשרת תגיע לראשונה לקבוצת המצבים $A = \{1, 6\}$?
 - (ז) (6 נק') האם קיימת התפלגות גבולית לשרשרת?
 - (ח) (6 נק') חשבו את כל ההתפלגויות הסטציונריות של השרשרת.
2. במחסן יש מקום ל-5 פריטים. בכל יום מגיעות מספר מקרי אחיד של פריטים: $U \sim \text{Unif}\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (משתנה מקרי אחיד בדיד מ-1 עד 5). כאשר אין מספיק פריטים במחסן אז רק חלק מההזמנות מסופקות. אם בסוף יום יש פחות מ-3 פריטים במחסן אז ממלאים מחדש את המלאי. כלומר, אם בסוף יום יש 2 או פחות פריטים אז בבוקר למחרת יהיו 5 פריטים.
- (א) (6 נק') נסמן ב- X_n את מספר הפריטים במחסן בסוף היום ה- $n \geq 0$. הסבירו מדוע $(X_n)_{n \geq 0}$ היא שרשרת מרקוב בזמן בדיד וקבעו את מטריצת המעברים שלה. כמו כן ציירו את דיאגרמת המעברים.
 - (ב) (6 נק') נניח כי המחסן מלא בתחילת היום הראשון: $X_0 = 5$, מהי תוחלת מספר הימים עד שיתבצע מילוי מחדש של המחסן?
 - (ג) (6 נק') נניח כי המחסן מלא בתחילת היום הראשון: $X_0 = 5$, מהי ההסתברות שביום השני תהיה הזמנה שלא סופקה?
 - (ד) (6 נק') הסבירו מדוע השרשרת היא ארגודית וחשבו את ההתפלגות הסטציונארית.
 - (ה) (6 נק') בטווה הארוך, מה פרופורצית ההזמנות הלא מסופקות?

3. בחניון של מרכז מסחרי קטן יש 3 מקומות חניה. מכוניות מגיעות לחפש חניה בחניון לפי תהליך פואסון עם קצב של 10 לשעה. אם החניון מלא הנהגים ממשיכים לחפש במקום אחר (ולא חוזרים שוב לחניון). נתון כי 20% מהמכוניות נשארות בחניה זמן ארוך: זמן חניה ארוך הוא מ"מ מעריכי עם תוחלת של 4 שעות. בנוסף, נתון כי 80% מהמכוניות נשארות בחניה זמן קצר: זמן חניה קצר הוא מ"מ מעריכי עם תוחלת של חצי שעה.

- (א) (5 נק') נתון כי החניון ריק בשעה 9. מהי תוחלת הזמן עד שלראשונה תהיה חניה תפוסה בחניון?
- (ב) (5 נק') נתון כי בין השעה 9:00 ל-9:10 הגיעו 4 מכוניות. מה הסיכוי שלפחות 2 מתוכן חיפשו חניה קצרה?
- (ג) (5 נק') נתון כי בין השעה 9:00 ל-9:10 הגיעו 4 מכוניות. מה הסיכוי שבדיוק 2 מתוכן הגיעו לפני 9:05?
- (ד) (5 נק') חשבו את השונות המשותפת של מספר המכוניות המגיעות לחניון עבור חניה ארוכה בשעה מסוימת ושל מספר המכוניות המגיעות לחניון עבור חניה קצרה באותה שעה.
- (ה) (5 נק') נתון כי בשעה 10:00 בבוקר החניון מלא. מה סיכוי שתהיה חניה פנויה למכונית הראשונה המגיעה לאחר 10:00? (שימו לב כי ישנם מספר מצבים התחלתיים אפשריים).
- (ו) (5 נק') נסמן ב- X_t את מספר המכוניות בחניון בזמן $t \geq 0$. האם X_t היא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
- (ז) (5 נק') את המספר הכולל של המכוניות ניתן לרשום כ- $X_t = S_t + L_t$, כאשר S_t זה מספר המכוניות בחניה קצרה ו- L_t זה מספר המכוניות בחניה ארוכה. הסבירו מדוע התהליך $W_t = (S_t, L_t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף וציירו את דיאגרמת המעברים המתאימה.
- (ח) (5 נק') נתון כי בשעה 11:00 החניון מלא, כאשר שתי מכוניות בחניה קצרה ומכונית אחת בחניה ארוכה. מהי תוחלת הזמן עד שהחניון יהיה ריק לראשונה?